Hoofdstuk 1: Combinatoriek.

1.1 Telproblemen visualiseren

Opgave 1:

a. 6 ; $2 \cdot 3 = 6$

b. voordeel: een wegendiagram is compacter
nadeel: bij een wegendiagram moet je weten dat je moet vermenigvuldigen terwijl je bij een boomdiagram het aantal mogelijkheden kunt tellen door het aantal eindpunten te tellen.

Opgave 2:

a.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

b. 10

c. 6-3 5-4 4-5 3-6
6-4 5-5 4-6
6-5 5-6
6-6

Opgave 3:

a. ieder team speelt één keer tegen ieder ander team.

b. rooster

c. Ieder team speelt vier wedstrijden dus zou je zeggen: $5 \cdot 4 = 20$ maar dan speelt 4v1 thuis tegen 4v2 maar 4v1 speelt ook uit tegen 4v2 want deze wedstrijd tel je bij 4v2.
Dus $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ wedstrijden.

d. ieder team speelt $n-1$ wedstrijden, dus totaal $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ wedstrijden.

e. $\frac{1}{2}n(n-1) = 45$
$n(n-1) = 90$
$n = 10$ want $10 \cdot 9 = 90$
Dus er zitten 10 teams in de competitie.

Opgave 4:

a. per groep: $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden
afvalfase: er moeten 7 teams afvallen dus $7 \cdot 2 = 14$ wedstrijden
totaal: $8 \cdot 20 + 14 = 174$ wedstrijden

b. groepsfase: $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden
afvalfase: $3 \cdot 2 = 8$ wedstrijden
totaal: $8 + 6 = 14$ wedstrijden

Opgave 5:
De eerste en derde baan mogen dezelfde kleur hebben, dus $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ mogelijkheden.

Opgave 6:
a. BAAA , ABAA , AABA , ABBB , BABB , BBAB
b. 3 sets: 2 mogelijkheden (AAA of BBB)
4 sets: 6 mogelijkheden (zie a)
5 sets: 12 mogelijkheden (BBAAA , BABAA, BAABA , ABBAA, ABABA , AABBA
dus A kan op 6 manieren winnen, dus B ook)
totaal: $2 + 6 + 12 = 20$ mogelijkheden

Opgave 7:

som

8	9	10	11	12
7	8	9	10	11
6	7	8	9	10
5	6	7	8	9
4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	**2**	**3**	**4**

product

8	8	16	24	32
7	7	14	21	28
6	6	12	18	24
5	5	10	15	20
4	4	8	12	16
3	3	6	9	12
2	2	4	6	8
1	1	2	3	4
	1	**2**	**3**	**4**

a. 4
b. 18
c. 3

Opgave 8:
a. 6-6-4 6-4-6 4-6-6
6-5-5 5-6-5 5-5-6
b. som 18: 1 manier (6-6-6)
som 17: 3 manieren (6-6-5 , 6-5-6 , 5-6-6)
som 16: 6 manieren (zie a)
dus totaal: $1 + 3 + 6 = 10$ manieren.
c. 6-6-3 6-3-6 3-6-6
6-5-4 6-4-5 5-6-4 5-4-6 4-6-5 4-5-6
5-5-5
dus totaal 10 manieren

Opgave 9:
a. 6 manieren (1-1-3 , 1-3-1 , 3-1-1 , 1-2-2 , 2-1-2 , 2-2-1)
b. som 3: 1 manier (1-1-1)
som 4: 3 manieren (1-1-2 , 1-2-1 , 2-1-1)
som 5: 6 manieren (zie a)
som 6: 10 manieren (1-1-4 , 1-4-1 , 4-1-1 , 1-2-3 , 1-3-2 , 2-1-3 , 2-3-1 , 3-2-1 , 3-1-2 ,
2-2-2)
Dus totaal $1 + 3 + 6 = 10 = 20$.

Opgave 10:

a. $1\times 50+1\times 20$

$1\times 50+2\times 10$

$3\times 20+1\times 10$

$2\times 20+3\times 10$

$1\times 20+5\times 10$

7×10

b. $2\times 50+1\times 10$

$1\times 50+3\times 20$

$1\times 50+2\times 20+2\times 10$

$1\times 50+1\times 20+4\times 10$

$1\times 50+6\times 10$

$5\times 20+1\times 10$

$4\times 20+3\times 10$

$3\times 20+5\times 10$

$2\times 20+7\times 10$

$1\times 20+9\times 10$

11×10

Dus in totaal 11 manieren.

Opgave 11:

		muziek		
		wel	**niet**	
sport	**wel**	8	10	18
	niet	4	10	14
		12	20	32

Dus 8 leerlingen doen aan sport en muziek.

Opgave 12:

		wiskunde		
		voldoende	**onvoldoende**	
Engels	**voldoende**	15	2	17
	onvoldoende	7	4	11
		22	6	28

Dus 15 leerlingen hebben voor beide vakken een voldoende.

Opgave 13:

		alcohol		
		geen	**te veel**	
technische staat auto	**goed**	410	70	480
	slecht	26	6	32
		436	76	512

Dus 410 bestuurders kregen geen bekeuring.

Dat is $\frac{410}{512}\cdot 100\% = 80\%$

1.2 Tellen met en zonder herhaling.

<u>Opgave 14:</u>

a. $4\cdot 3\cdot 3 = 36$

b. $2\cdot 2\cdot 1 = 4$

<u>Opgave 15:</u>

a. $2\cdot 4\cdot 5 = 40$

b. $2\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 3 = 52$

c. AAC of ACA of CAA dus $2\cdot 4\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot 4\cdot 5 = 40$

d. $3\cdot 6\cdot 5 = 90$

e. 3 keer geel of 3 keer rood of 3 keer blauw of 3 keer groen
$1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 2 = 20$

f. ggr of grg of rgg dus $1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 = 16$

<u>Opgave 16:</u>

a. $11\cdot 8\cdot 5 = 440$

b. $11\cdot (8+5) = 143$

<u>Opgave 17:</u>

a. $4\cdot 2\cdot 5 = 40$

b. $3\cdot 2\cdot 2 = 12$

c. $4\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 2 = 76$

d. $3\cdot 2\cdot 2 = 12$

e. vff of fvf of ffv dus $3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 4 = 48$

<u>Opgave 18:</u>

Omdat ze al dan niet een jasje draagt heeft ze wat betreft het jasje dus een extra mogelijkheid.

a. $3\cdot 4\cdot 6\cdot 3 = 216$

b. $5\cdot (4+3)\cdot (6+4)\cdot 4 = 1400$

c. $5\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 320$

<u>Opgave 19:</u>

a. $8\cdot 5\cdot 7\cdot 3\cdot 11 = 9240$

b. $7\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 10 = 3360$

c. §4 en §5 en (§1 en §2 of §1 en §3 of §2 en §3) dus $3\cdot 11\cdot (8\cdot 5 + 8\cdot 7 + 5\cdot 7) = 4323$

<u>Opgave 20:</u>

a. $14\cdot 17 = 238$

b. $19\cdot 7 = 133$

c. $14\cdot 5 = 70$

d. één van de twee is 16 jaar dus de andere niet
$5\cdot 26 + 26\cdot 5 = 260$

e. de eerste leerling is 16 en de tweede leerling is 15
of de eerste leerling is 17 en dan is de tweede leerling 15 of 16
$5\cdot 19 + 7\cdot (19+5) = 263$

Opgave 21:

a. de eerste leerling is een meisje en de tweede leerling is een jongen van 16 jaar.
b. de twee gekozen leerlingen zijn een jongen en een meisje, waarbij de ene leerling 15 jaar en de andere leerling 17 jaar is.

Opgave 22:

de tweede letter moet anders zijn dan de eerste: $4 \cdot 3 = 12$
de letters mogen gelijk zijn: $4 \cdot 4 = 16$

Opgave 23:

a. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b. het eerste cijfer is dus 3,4 of 5 dus $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
c. het eerste cijfer is een 6 en het tweede cijfer is een 3 of een 4 dus $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$
d. als het eerste cijfer een 6 is dan moet het tweede cijfer een 5,6,7 of 8 zijn
of het eerste cijfer is een 7 of een 8, de overige cijfers maken dan niet uit
$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 576$

Opgave 24:

a. $26^3 = 17576$
b. $26 \cdot 25 \cdot 25 = 16250$ (de eerste en derde letter mogen gelijk zijn)
c. $1 \cdot 26^2 = 676$

Opgave 25:

a. $10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 = 17576000$
b. $10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 10 = 882000$
c. $10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 8 = 547200$
d. $10 \cdot 10 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 10 = 7497000$

Opgave 26:

a. $4^{10} = 1048576$
b. $4^5 = 1024$

Opgave 27:

a. $4^5 = 1024$
b. $4^4 = 256$
c. $4 \cdot 3^4 = 324$
d. een mogelijke code is ♣♣♣♣□ , dat kan op 3 manieren
aangezien het andere symbool op 5 plaatsen kan staan zijn er dus $5 \cdot 3 = 15$ codes

Opgave 28:

a. $15 \cdot 26 \cdot 25 = 9750$
b. $15 \cdot 12 \cdot 11 = 1980$
c. drank jongen, hapjes meisje: $12 \cdot 15 \cdot 25 = 4500$
drank meisje, hapjes jongen: $12 \cdot 15 \cdot 25 = 4500$
dus totaal $4500 + 4500 = 9000$

Opgave 29:

a. Voor ieder hokje zijn er twee mogelijkheden: wel of niet zwart, dus $2^{25} = 33554432$.

b. $33554432 : 100 \cdot 0{,}1 = 33554{,}432\ \text{mm} = 33{,}55\ \text{m}$

c. Er zijn nog 9 hokjes over om wel of niet zwart te kleuren, dus $2^9 = 512$.

Opgave 30:

a. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$

b. jmjmjmj dus $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$

c. $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

d. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 240$

e. P…..P of E…..E dus $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 960$

f. mjj…. of jmm…. dus $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$

Opgave 31:

a. elke letter hoogstens één keer: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
elke letter vaker: $6^3 = 216$

b. geen gelijke letters: $6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1956$
wel gelijke letters: $6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 = 55986$

Opgave 32:

a. het eerste cijfer is een 2, 3 of 4 dus $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 972$

b. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 360$

c.

eerste cijfer	tweede cijfer	derde cijfer	
5	6 of 7		$= 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16$
6 of 7	5		$= 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16$
6 of 7	geen 5	5	$= 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 16$
6 of 7	geen 5	geen 5	$= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 144$

Dus totaal: $16 + 16 + 16 + 144 = 192$

d.

eerste cijfer	tweede cijfer	derde cijfer	
5			$= 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 40$
	5		$= 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 40$
		5	$= 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 40$
geen 5	geen 5	geen 5	$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 360$

dus totaal: $40 + 40 + 40 + 360 = 480$

Opgave 33:

a. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19958400$

b. $12 \cdot 11^7 = 233846052$

c. $12^8 = 429981696$

d. $11 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1932612$

Opgave 34:

a. een code van vier letters waarbij gelijke letters zijn toegestaan

b. een code van drie verschillende letters

c. een code van twee verschillende letters of een code van drie letters waarbij gelijke letters zijn toegestaan

d. een code van drie letters waarbij twee naast elkaar staande letters moeten verschillen

1.3 Permutaties

Opgave 35:

a. $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

b. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

Opgave 36:

$12\ n\text{Pr}\ 5 = 95040$

Opgave 37:

$14\ n\text{Pr}\ 10 = 3632428800$

Opgave 38:

a. $4! = 24$

b. $3! = 6$

Opgave 39:

a. $6! = 720$ manieren

dus $720 \cdot 2 = 1440$ sec = 24 min

b. $8! = 40320$ manieren

dus $40320 \cdot 2 = 80640$ sec = 22,4 *uur*

Opgave 40:

a. $9! = 362880$

b. $9 \cdot 8 = 72$

c. $9\ n\text{Pr}\ 6 = 60480$

Opgave 41:

a. hoeveel codes zijn er met zes verschillende letters?

b. hoeveel codes zijn er met 3 verschillende letters?

c. hoeveel codes van vier letters zijn er als iedere letter meerdere keren mag voorkomen?

d. hoeveel codes van vier letters zijn er die beginnen met een a of een b en waarbij de overige letters geen a of b zijn maar een letter wel vaker gebruikt mag worden?

Opgave 42:

a. $8! = 40320$

b. Als je de wiskundeboeken als één blok ziet zijn er $4!$ manieren om het blok wiskundeboeken en de drie scheikundeboeken te verwisselen.
Maar de wiskundeboeken kun je onderling ook op $5!$ manieren verwisselen.
Dus totaal $4! \cdot 5! = 2880$ manieren.

c. $5! \cdot 3! + 3! \cdot 5! = 1440$

Opgave 43:

a. $3 \cdot 7! \cdot 2 = 30240$

b. $6! \cdot 4! = 17280$

c. er zijn drie manieren om de romantische stukken om en om te spelen; namelijk:
r . r . r . r . .   of . r . r . r . r .   of . . r . r . r . r

dus: $4\cdot5\cdot3\cdot4\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1+5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1+5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1=8640$
of sneller: $3\cdot5!\cdot4!=8640$

d. de drie genres kun je op $3!$ manieren verwisselen
dus $3!\cdot3!\cdot4!\cdot2!=1728$

Opgave 44:

a. DOP , DPO , OPD , ODP , POD , PDO
b. POP , PPO , OPP
c. als je de twee P's verwisselt staat er hetzelfde woord, dus de twee P's kun je op $2!$ manieren verwisselen, dus er zijn $\frac{3!}{2!}=3$ manieren.

Opgave 45:

a. $\frac{10!}{4!}=151200$

b. $\frac{11!}{2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!}=2494800$

c. $\frac{16!}{3!\cdot5!\cdot2!\cdot2!\cdot2!}=3632428800$

d. $\frac{11!}{4!\cdot4!\cdot2!}=34650$

Opgave 46:

$\frac{10!}{4!\cdot3!\cdot3!}=4200$

1.4 Combinaties

Opgave 47:

a. $4\ n\Pr 2 = 12$

b. $12 : 2 = 6$

Opgave 48:

a. combinatie
b. permutatie
c. combinatie
d. combinatie
e. permutatie

Opgave 49:

a. $\binom{18}{4} = 3060$

b. $\binom{45}{6} = 8145060$

c. $\binom{20}{5} = 15504$

d. $\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 17 = 153$

e. $16 \cdot 15 = 240$

Opgave 50:

a. $\binom{12}{3} = 220$

b. $\binom{10}{5} = 252$

c. $12 \cdot 10 \cdot 7 = 840$

d. $29\ n\Pr 5 = 14250600$

e. je hebt dus eigenlijk 9 plaatsen: 1 keer klassiek, 1 keer pop en 7 keer Nederlandstalig
dus: $9! \cdot 12! \cdot 10! = 6{,}3 \cdot 10^{20}$

f. $\binom{7}{3} = 35$

Opgave 51:

a. $\binom{15}{5} = 3003$

b. $\binom{13}{5} = 1287$ dus het aantal vermindert met: $3003 - 1287 = 1716$

Opgave 52:

a. $\binom{28}{8} = 3108105$

b. $8! = 40320$

c. $\binom{8}{5} = 56$

d. $\binom{20}{6} = 38760$

Opgave 53:

a. 9 zijden
bij ieder hoekpunt 6 diagonalen dus totaal: $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27$ diagonalen

b. je moet drie punten kiezen waarbij de onderlinge volgorde niet van belang is, want $\Delta ABC = \Delta ACB = \Delta BAC = ...$
dus $\binom{9}{3} = 84$

c. bij ieder hoekpunt zijn er $n-3$ diagonalen, dus totaal $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$

Opgave 54:

a. $\binom{60}{5} = 5461512$

b. $\binom{40}{4} = 91390$

c. $\binom{60}{5} \cdot \binom{40}{4} = 5 \cdot 10^{11}$

Opgave 55:

a. $\binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1680$

b. $\binom{6}{6} = 1$

c. $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} = 55$

d. meer dan vier jongens is hetzelfde als hoogstens één meisje, dus zie opgave c: 55

Opgave 56:

a. $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 180$

b. je let op blauw of niet blauw, dus je hebt vijf blauwe en zeven niet blauwe knikkers.
$\binom{5}{4} \cdot \binom{7}{1} + \binom{5}{5} = 36$

c. $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = 336$

d. $\binom{7}{5} = 21$

Opgave 57:

a. $\binom{60}{4} = 487635$

b. $\binom{54}{4} = 316251$

c. $\binom{6}{2} \cdot \binom{54}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{54}{1} + \binom{6}{4} = 22560$

Opgave 58:

a. $\binom{36}{8} = 30260340$

b. $\binom{36}{4} \cdot \binom{33}{4} = 2410392600$

c. $\binom{20}{2} \cdot \binom{36}{5} \cdot \binom{13}{1} = 931170240$

d. $\binom{36}{7} \cdot \binom{33}{1} + \binom{36}{8} = 305733780$

e. $\binom{16}{2} \cdot \binom{53}{6} = 2754897600$

Opgave 59:

a. nee, want het aantal verschillende combinaties is $\binom{44}{6} = 7059052$

het verschil is dus $7059052 - 5000000 = 2059052$

b. $27 \cdot \frac{2}{3} - 5 = 13$ miljoen bedraagt de netto winst

per deelnemer: $\frac{13000000}{2500 \cdot 20} = 260$ per jaar $= 21{,}67$ per maand

Opgave 60:

a. op hoeveel manieren kun je zeven mensen op een rij zetten?
b. op hoeveel manieren kun je drie mensen kiezen uit een groep van zeven mensen?
c. maak een code door eerst een letter te kiezen uit a,b,c,d,e,f of g en daarna een cijfer te kiezen uit 1,2 of 3. Hoeveel verschillende codes kun je zo maken?
d. Hoeveel codes van drie letters kun je maken uit a,b,c,d,e,f of g als gelijke letters zijn toegestaan?
e. Op hoeveel manieren kun je zeven driekeuzevragen invullen?
f. Op hoeveel manieren kun je een top-drie samenstellen uit zeven boeken?

Opgave 61:

a. $\binom{17}{0} = 1$ $\binom{17}{1} = 17$ $\binom{17}{16} = 17$ $\binom{17}{17} = 1$

b. $\binom{17}{0} = 1$ want van 17 dingen er 0 kiezen kan op 1 manier, namelijk allemaal niet kiezen

$\binom{17}{1} = 17$ want van 17 dingen er 1 kiezen kan op 17 manieren

$\binom{17}{16} = 17$ want als je van de 17 dingen er 16 kiest kies je er 1 niet dus is het eigenlijk hetzelfde als $\binom{17}{1} = 17$

$\binom{17}{17} = 1$ want als je van 17 dingen er 17 moet kiezen kan dat op 1 manier door ze namelijk allemaal te kiezen

c. $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$

Opgave 62:

a. $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = 1{,}2 \cdot 10^{10}$

b. $\binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} = 1{,}4 \cdot 10^{18}$

c. $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 560$

Opgave 63:

$\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{6} = 840$

Opgave 64:

Kies er eerst 3 uit, dus $\binom{12}{3}$

Dan heb je er nog 9 over waarvan je er 4 moet kiezen, dus $\binom{9}{4}$.

Tot slot moet je de overgebleven 5 stuks allemaal kiezen, dus $\binom{5}{5}$.

Dus totaal: $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$.

Of: je hebt 3 keer groep A, 4 keer groep B en 5 keer groep C, dus $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$

1.5 De driehoek van Pascal

Opgave 65:

a. combinaties, het gaat er alleen om welke twee vierkantjes je groen maakt, niet in welke volgorde.

b. $\binom{6}{2} = 15$

Opgave 66:

a. $2^{10} = 1024$

b. $\binom{10}{8} = 45$

c. $\binom{10}{5} = 252$

d. $2^{8} = 256$

e. $\binom{8}{3} = 56$

Opgave 67:

a. $2^{20} = 1048576$

b. $\binom{20}{15} = 15504$

c. $\binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 6196$

dat is $\frac{6196}{1048576} \cdot 100\% = 0{,}6\%$

Opgave 68:

a. voor ieder lampje zijn er twee mogelijkheden: aan of uit.
dus totaal $2^{19} = 524288$

b. $\binom{19}{5} = 11628$

c. $\binom{19}{0} + \binom{19}{1} = 20$

d. je houdt nog 16 lampjes over die aan of uit kunnen zijn, dus $2^{16} = 65536$

Opgave 69:

a. $\binom{12}{5} = 792$

b. $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{5} = 27720$

c. $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} = 277200$

Opgave 70:

a. $\dfrac{2^9}{2} = 256$

b. $\dfrac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2} = 386$

c. $2^{14} - 2 \cdot 1 = 16382$

Opgave 71:

a. $\binom{25}{0} + \binom{25}{1} + ... + \binom{25}{12} = \dfrac{2^{25}}{2} = 16777216$

b. $\binom{25}{14} + \binom{25}{15} + ... + \binom{25}{25} = \dfrac{2^{25} - 2 \cdot \binom{25}{13}}{2} = 11576916$

c. $\binom{25}{1} + \binom{25}{2} + ... + \binom{25}{24} = 2^{25} - 2 \cdot 1 = 33554430$

Opgave 72:

a. OOOONNNN of ONONONON
b. ja, nee
c. 8 letters, waarvan 4 keer een N
d. $\binom{8}{4} = 70$

Opgave 73:

a. $\binom{14}{6} = 3003$

b. $\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} = 2240$

c. $\binom{7}{4} \cdot \binom{8}{3} = 1960$

Opgave 74:

a. $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{8}{5} = 11200$

b. $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{9}{6} \cdot \binom{2}{1} = 2016$

Opgave 75:

a. de kortste route van P naar Q is vier keer naar rechts en dat kan maar op 1 manier.

$\binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 36$

b. $2 \cdot 1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 1 \cdot \binom{5}{2} = 200$

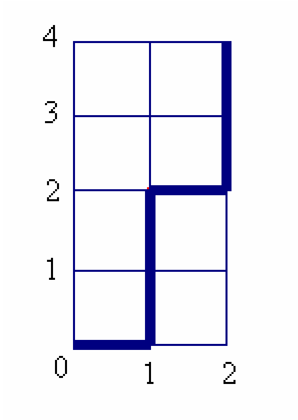
Opgave 76:

a. $\binom{12}{8} \cdot \binom{15}{12} = 225225$

b. $\binom{12}{8} \cdot 1 \cdot \binom{10}{6} = 103950$

Opgave 77:

a.



b. $\binom{6}{2} = 15$

c. $\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{2} = 40$

d. $2^4 = 16$

Opgave 78:

a. je moet zes keer kiezen tussen links of rechts, maar om vanuit *T* in *A* te komen moet je twee keer naar rechts kiezen.

b. het onderste getal geeft het aantal keer aan dat je naar rechts gaat.
som: $2^6 = 64$

c.
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

d.
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

e. $2^{10} = 1024$

Opgave 79:

a. $\binom{10}{7} = 120$

b. $\binom{10}{1} = 10$

c. $2^{10} = 1024$

d. $\binom{5}{2} \cdot 2^5 = 320$

Opgave 80:

a. $\binom{6}{3} = 20$

b. van A naar B via C: $\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} = 9$ routes

dus er zijn $20 - 9 = 11$ routes die niet via C gaan

Opgave 81:

a. $\binom{8}{4} = 70$

b. $2 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{3} = 700$

c. $2 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \left(\binom{4}{2} + \binom{4}{1} \right) = 1200$

Opgave 82:

a.
$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= 1a + 1b \\ (a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ (a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\ (a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5\end{aligned}$$

De coëfficiënten zijn precies de getallen uit de driehoek van Pascal.

Opgave 83:

a.
$$\begin{aligned}(a+1)^5 &= \binom{5}{0} \cdot a^5 + \binom{5}{1} \cdot a^4b + \binom{5}{2} \cdot a^3b^2 + \binom{5}{3} \cdot a^2b^3 + \binom{5}{4} \cdot ab^4 + \binom{5}{5} \cdot b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

b. $(a-2)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot -2 + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot (-2)^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot (-2)^3 + \binom{4}{4} \cdot (-2)^4$

$= a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$

c. $(2a+3)^5 =$

$= \binom{5}{0} \cdot (2a)^5 + \binom{5}{1} \cdot (2a)^4 \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot (2a)^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot (2a)^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 2a \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5$

$= 32a^5 + 5 \cdot 16a^4 \cdot 3 + 10 \cdot 8a^3 \cdot 9 + 10 \cdot 4a^2 \cdot 27 + 5 \cdot 2a \cdot 81 + 243$

$= 32a^5 + 240a^4 + 720a^3 + 1080a^2 + 810a + 243$

d. $(3a-1)^6 = \binom{6}{0} \cdot (3a)^6 + \binom{6}{1} \cdot (3a)^5 \cdot -1 + \binom{6}{2} \cdot (3a)^4 \cdot (-1)^2 + \binom{6}{3} \cdot (3a)^3 \cdot (-1)^3 +$

$\binom{6}{4} \cdot (3a)^2 \cdot (-1)^4 + \binom{6}{5} \cdot 3a \cdot (-1)^5 + \binom{6}{6} \cdot (-1)^6$

$= 729a^6 + 6 \cdot 243a^5 \cdot -1 + 15 \cdot 81a^4 + 20 \cdot 27a^3 \cdot -1 + 15 \cdot 9a^2 + 6 \cdot 3a \cdot -1 + 1$

$= 729a^6 - 1458a^5 + 1215a^4 - 530a^3 + 135a^2 - 18a + 1$

Opgave 84:

a. 16 termen

b. $\binom{15}{2} \cdot a^{13}b^2 = 105a^{13}b^2$

$\binom{15}{12} \cdot a^3b^{12} = 455a^3b^{12}$

Opgave 85:

a. $\binom{20}{3} = 1140$

b. $\binom{9}{6} \cdot 2^3 \cdot (-1)^6 = 84 \cdot 8 \cdot 1 = 672$

Opgave 86:

a. $x^8 = (x^2)^4$ dus $\binom{8}{4} \cdot 1^4 = 70$

b. $\binom{11}{3} \cdot (\frac{1}{2})^8 \cdot (-2)^3 = 165 \cdot \frac{1}{256} \cdot -8 = -5{,}15625$

Opgave 87:

a. $(1+1)^6 = \binom{6}{0} \cdot 1^6 + \binom{6}{1} \cdot 1^5 \cdot 1^1 + \binom{6}{2} \cdot 1^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} \cdot 1^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{5} \cdot 1^1 \cdot 1^5 + \binom{6}{6} \cdot 1^6$

$= \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

b. $(1+1)^6 = 2^6 = 64$ dus $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64$

1.6 Diagnostische toets

Opgave 1:

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

som

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

product

a. 5
b. 10
c. 17

Opgave 2:

a. som 3: 1 manier (111)
som 4: 3 manieren (112 , 121 , 211)
som 5: 6 manieren (113 , 131 , 311 , 122 , 212 , 221)
dus totaal : $1+3+6=10$
b. 10 manieren
114 , 141 , 411 , 123 ,132 , 213 , 231 , 321 , 312 , 222

Opgave 3:

	vader			
moeder		**wel**	**niet**	
	wel	4	16	20
	niet	11	69	80
		15	85	100

Dus van 11 studenten heeft alleen de vader aan een universiteit gestudeerd.

Opgave 4:

a. $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2520$
b. $3\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=1080$
c. $7^5=16807$
d. als het eerste cijfer 5 is, dan kan het tweede cijfer 4,5,6,7 of 8 zijn, dus: $1\cdot 5\cdot 7^3=1715$
of het eerste cijfer is 6,7 of 8, dus: $3\cdot 7^4=7203$
totaal: $1715+7203=8918$

Opgave 5:

a. $8!=40320$
b. het blok jongens fietsen en de 5 meisjes fietsen kun je op $6!=720$ manieren rangschikken
de drie jongens fietsen kun je op $3!=6$ manieren rangschikken
dus totaal: $6!\cdot 3!=4320$ manieren
c. $5\cdot 6!\cdot 4=14400$

Opgave 6:

a. $\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

b. $\frac{8!}{2!\cdot 3!}=3360$

c. $\frac{10!}{2!\cdot 3!}=302400$

d. $\frac{10!}{4!\cdot 2!}=75600$

Opgave 7:

a. $\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}=225$

b. $\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{2}=420$

c. $\binom{5}{3}\cdot\binom{9}{1}+\binom{5}{4}=95$

d. $\binom{11}{4}=330$

Opgave 8:

a. $\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}=3150$

b. je hebt 1 groep van 8 en 2 groepen van 6
of 2 groepen van 7 en 1 groep van 6
dus $\binom{20}{8}\cdot\binom{12}{6}+\binom{20}{7}\cdot\binom{13}{7}=249420600$
als je ook nog kijkt naar welke of groep A bv 8 personen bevat en de groepen B en C ieder 6, dan zijn er totaal $249420600\cdot 3=748261800$ manieren

Opgave 9:

a. $2^{16}=65536$

b. $\binom{16}{8}=12870$

c. $\binom{16}{14}+\binom{16}{15}+\binom{16}{16}=137$

Opgave 10:

$2^{12}-2\cdot 1=4094$

Opgave 11:

a. $\binom{11}{7}=330$

b. $\binom{7}{5} \cdot \binom{4}{2} = 126$

c. $\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 72$

<u>Opgave 12:</u>

$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 14$

<u>Opgave 13:</u>

a. $(a-5)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot -5 + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot (-5)^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot (-5)^3 + \binom{4}{4} \cdot (-5)^4$

$= a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot -5 + 6 \cdot a^2 \cdot 25 + 4 \cdot a \cdot -125 + 625$

$= a^4 - 20a^3 + 150a^2 - 500a + 625$

b. $\binom{5}{2} \cdot (2p)^3 \cdot (-3)^2 = 10 \cdot 8p^3 \cdot 9 = 720p^3$

Gemengde opgaven hoofdstuk 1: Combinatoriek

Opgave 1:

	man	vrouw	
jonger dan 25	38	174	212
25 of ouder	150	201	351
	188	375	563

a. 150

b. $\dfrac{201}{351} \cdot 100\% = 57{,}3\%$

Opgave 2:

a. $\binom{25}{3} = 2300$

b. $\binom{14}{2} \cdot \binom{14}{1} + \binom{14}{3} = 1638$

c. 15,16,17 of 15,16,18 of 15,17,18 of 16,17,18
$6 \cdot 14 \cdot 5 + 6 \cdot 14 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 3 + 14 \cdot 5 \cdot 3 = 972$

Opgave 3:

a. $2^3 = 8$

b. ja, $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ tekens zijn er mogelijk

Opgave 4:

a. $\binom{7}{2} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{6}{2} = 10001880$

b. $\binom{6}{4} \cdot 1 \cdot \binom{10}{5} \cdot 1 = 3780$

c. *OBACO* of *OCABO*
$\binom{7}{2} \cdot 1 \cdot \binom{9}{4} \cdot 1 = 2646$
Er zijn in totaal 6 mogelijkheden waarvan er steeds twee aan twee hetzelfde zijn.

Opgave 5:

a. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

b. $8^5 = 32768$

c. $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$

Opgave 6:

a. $\dfrac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 369600$

b. $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12600$

Opgave 7:

a. $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = 560$

b. kies 4 cijfers uit totaal 6, dat kan op $\binom{6}{4} = 15$ manieren

per gekozen viertal: $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 2520$ manieren

totaal: $15 \cdot 2520 = 37800$

c. 12345611 kan op: $\frac{8!}{3!} = 6720$ manieren maar de laatste twee cijfers kunnen op 6 manieren , dus totaal $6 \cdot 6720 = 40320$ manieren

12345612 kan op $\frac{8!}{2!\cdot 2!} = 10080$ manieren, maar twee verschillende kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren, dus totaal: $15 \cdot 10080 = 151200$ manieren

dus totaal: $40320 + 151200 = 191520$

Opgave 8:

a. je hebt 12 teams dus zijn er $12!$ manieren om die te rangschikken.

Stel je hebt de volgorde A-B, C-D, E-F, G-H, I-J, K-L , dan kun je deze zes paren op $6!$ manieren verwisselen, maar iedere manier levert dezelfde wedstrijden op.

Dus $\frac{12!}{6!} = 665280$ lotingen.

b. $4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 15482880$

c. in de voorrondes 12 wedstrijden (uit en thuis)

per poule $3 \cdot 2 = 6$ wedstrijden, dus voor twee poules 12 wedstrijden

de finale is nog 1 wedstrijd

dus totaal $12 + 12 + 1 = 25$ wedstrijden

Opgave 9:

a. $\binom{12}{7} = 792$

b. $\binom{12}{7} \cdot 2^5 = 25344$

Opgave 10:

a. $\binom{12}{5} = 792$

b. $2^{12} = 4096$

c. $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} = 96$

d. $\binom{4}{2} \cdot 2^8 = 1536$

Opgave 11:

a. $\dfrac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}=2520$

b. $\dfrac{14!}{5!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 4!}=2522520$

Opgave 12:

a. $(2x-3y)^5=\binom{5}{0}\cdot(2x)^5+\binom{5}{1}\cdot(2x)^4\cdot(-3y)+\binom{5}{2}\cdot(2x)^3\cdot(-3y)^2+$

$\binom{5}{3}\cdot(2x)^2\cdot(-3y)^3+\binom{5}{4}\cdot(2x)\cdot(-3y)^4+\binom{5}{5}\cdot(-3y)^5$

$=1\cdot 32x^5+5\cdot 16x^4\cdot -3y+10\cdot 8x^3\cdot 9y^2+10\cdot 4x^2\cdot -27y^3+5\cdot 2x\cdot 81y^4$

$+1\cdot -243y^5$

$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$

b. $\binom{10}{6}\cdot(2x)^4\cdot(5y)^6=210\cdot 16x^4\cdot 15625y^6=52500000x^4y^6$

dus 52500000

Opgave 13:

a. $(2^{13}-2):2=4095$

b. $2^{10}-2=1022$

c. $\dfrac{2^{19}}{2}=262144$